

2. 讨论 $g(x) = ae^x - \ln x - 1$ 的零点个数。

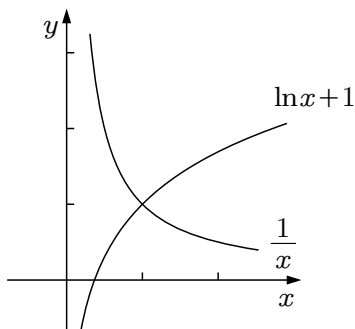
解: $ae^x - \ln x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\ln x + 1}{e^x}$$

记 $f(x) = \frac{\ln x + 1}{e^x}$, 下面研究 $f(x)$ 的性态。

$$f' = \frac{\frac{1}{x}e^x - e^x(\ln x + 1)}{e^{2x}} = \frac{\frac{1}{x} - \ln x - 1}{e^x}$$

令 $f' = 0$ 得 $\frac{1}{x} = \ln x + 1$, 猜解为 $x = 1$ 。



$\because \frac{1}{x} \downarrow$, 而 $\ln x \uparrow$, 故此方程只有一个解 $x = 1$ 。

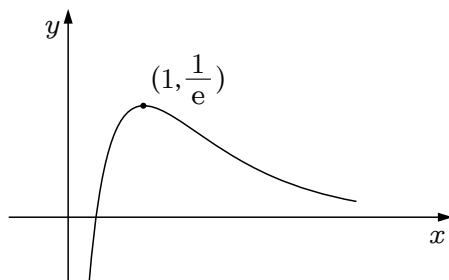
当 $0 < x < 1$ 时, $\frac{1}{x} > \ln x + 1$, 故 $f' > 0$;

当 $x > 1$ 时, $\frac{1}{x} < \ln x + 1$, 故 $f' < 0$

$$\text{又 } f(0) \rightarrow \frac{\ln 0 + 1}{e^0} \rightarrow -\infty$$

$$f(+\infty) \rightarrow \frac{\ln(+\infty) + 1}{e^{+\infty}} \rightarrow 0^+$$

据此可画出 $f(x)$ 的示意图如下:



当 $a > \frac{1}{e}$ 时, 没有零点。

当 $a = \frac{1}{e}$ 时, 有 1 个零点。

当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, 有 2 个零点。

当 $a \leq 0$ 时, 有 1 个零点。